Streszczenie

Marcin Nowicki

Linearyzacja przez sprzężenie zwrotne mechanicznych systemów sterowania

Praca jest poświęcona analizie mechanicznych systemów sterowania, które w lokalnych współrzędnych $x = \left(x^1, \dots, x^n\right)$ na gładkiej rozmaitości konfiguracyjnej Q, mają formę równań różniczkowych drugiego rzędu[1]

$$\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k + e^i(x) + \sum_{r=1}^{m} g^i_r(x)u_r, \qquad 1 \le i \le n,$$

gdzie $\Gamma^i_{jk}(x)$ są symbolami Christoffela odpowiadającymi siłom Coriolisa i odśrodkowym, $e(x)$ jest niesterowanym polem wektorowym na Q opisującym wpływ zewnę-trznych sił pozycyjnych działających na system (np., grawitacyjne lub sprężystości), a $g_r(x)$ są sterowanymi polami wektorowymi na Q. Równoważnie, mechaniczny układ sterowania można opisać za pomocą równań różniczkowych pierwszego rzędu na wiązce stycznej $\mathrm{T}Q$ będącej przestrzenią stanu systemu, używając współrzędnych $(x, y) = \left(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n\right)$

$$(\mathcal{MS}): \quad \begin{aligned} \dot{x}^i &= y^i \\ \dot{y}^i &= -\Gamma^i_{jk}(x)y^j y^k + e^i(x) + \sum_{r=1}^{m} g^i_r(x)u_r \end{aligned} \qquad 1 \le i \le n.$$

Głównym problemem rozważanym w pracy jest mechaniczna linearyzacja przez sprzężenie zwrotne (MF-linearyzacja), która polega na zastosowaniu do układu mechanicznego następujących przekształceń:

(i) zmian układu współrzędnych danych przez dyfeomorfizm

$$\begin{aligned} \Phi: \quad & \mathrm{T}Q \to \mathrm{T}\tilde{Q} \\ & (x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) = (\phi(x), D\phi(x)y) \end{aligned}$$

(ii) mechanicznego sprzężenia zwrotnego (α, β, γ) w postaci

$$u_r = \gamma^r_{jk}(x)y^j y^k + \alpha^r(x) + \sum_{s=1}^{m} \beta^r_s(x)\tilde{u}_s,$$

gdzie $\gamma^r_{jk} = \gamma^r_{kj}$,

tak, że przekształcony układ jest liniowy i mechaniczny

$$(\mathcal{LMS}): \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^i &= \tilde{y}^i \\ \dot{\tilde{y}}^i &= E^i_j\tilde{x}^j + \sum_{s=1}^{m} b^i_s\tilde{u}_s. \end{aligned}$$

[1] W całej pracy zastosowano konwencję sumacyjną Einsteina.

Marcin Nowicki

Abstract

Marcin Nowicki

Feedback Linearization of Mechanical Control Systems

This thesis is devoted to a study of mechanical control systems, which are defined in local coordinates $x = \left(x^1, ..., x^n\right)$ on a smooth configuration manifold Q. They take the form of second-order differential equations[1]

$$\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k + e^i(x) + \sum_{r=1}^{m} g^i_r(x)u_r, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

where $\Gamma^i_{jk}(x)$ are the Christoffel symbols corresponding to Coriolis and centrifugal terms, $e(x)$ is an uncontrolled vector field on Q representing the influence of external positional forces acting on the system (e.g. gravitational or elasticity), and $g_r(x)$ are controlled vector fields in Q. Equivalently, a mechanical control system can be described by a first-order system on the tangent bundle $\mathrm{T}Q$ which is the state space of the system using coordinates $(x, y) = \left(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n\right)$

$$(\mathcal{MS}): \quad \begin{aligned} \dot{x}^i &= y^i \\ \dot{y}^i &= -\Gamma^i_{jk}(x)y^jy^k + e^i(x) + \sum_{r=1}^{m} g^i_r(x)u_r \end{aligned} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

The main problem considered in this thesis is mechanical feedback linearization (shortly MF-linearization) by applying to the mechanical system the following transformations:

(i) changes of coordinates given by diffeomorphisms

$$\begin{aligned} \Phi: \quad & \mathrm{T}Q \to \mathrm{T}\tilde{Q} \\ & (x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) = (\phi(x), D\phi(x)y)\,; \end{aligned}$$

(ii) mechanical feedback transformations, denoted (α, β, γ), of the form

$$u_r = \gamma^r_{jk}(x)y^jy^k + \alpha^r(x) + \sum_{s=1}^{m} \beta^r_s(x)\tilde{u}_s,$$

where $\gamma^r_{jk} = \gamma^r_{kj}$,

such that the transformed system is linear and mechanical

$$(\mathcal{LMS}): \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^i &= \tilde{y}^i \\ \dot{\tilde{y}}^i &= E^i_j\tilde{x}^j + \sum_{s=1}^{m} b^i_s\tilde{u}_s. \end{aligned}$$

[1] Throughout we use Einstein summation convention.

Marcin Nowicki

Résumé

Marcin Nowicki

Linéarisation par bouclage des systèmes mécaniques de contrôle

Cette thèse est consacrée à l'étude des systèmes mécaniques de contrôle qui sont définis sur une variété différentielle de configuration Q munie des coordonnées locales $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$. Dans ces coordonnées, ils prennent la forme d'équation différentielle d'ordre deux[1]:

$$\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k + e^i(x) + \sum_{r=1}^{m} g^i_r(x)u_r, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

où les coefficients $\Gamma^i_{jk}(x)$ sont les symboles de Christoffel correspondant aux forces de Coriolois et centrifuges, $e(x)$ est un champ de vecteurs représentant l'influence des forces externes (par exemple, la gravité ou l'élasticité) et les $g_r(x)$ sont des champs de vecteurs contrôlés.

De manière équivalente nous pouvons décrire les trajectoires d'un système mécanique de contrôle par un système d'équations différentielles ordinaires sur le fibré tangent $\mathrm{T}Q$ muni des coordonnées $(x, y) = \left(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n\right)$:

$$(\mathcal{MS}) : \quad \begin{aligned} \dot{x}^i &= y^i \\ \dot{y}^i &= -\Gamma^i_{jk}(x)y^j y^k + e^i(x) + \sum_{r=1}^{m} g^i_r(x)u_r \end{aligned} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Le problème central étudié dans cette thèse est la linéarisation mécanique par bouclage des systèmes mécaniques de contrôle (MF-linéarisation) en appliquant les transformations suivantes:

(i) le changement de coordonnées par difféomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & \mathrm{T}Q \to \mathrm{T}\tilde{Q} \\ & (x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) = (\phi(x), D\phi(x)y)\,; \end{aligned}$$

(ii) la transformation par bouclage mécanique (α, β, γ) de la forme

$$u_r = \gamma^r_{jk}(x)y^j y^k + \alpha^r(x) + \sum_{s=1}^{m} \beta^r_s(x)\tilde{u}_s,$$

où $\gamma^r_{jk} = \gamma^r_{kj}$,

de sorte que le système transformé soit linéaire et mécanique

$$(\mathcal{LMS}) : \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^i &= \tilde{y}^i \\ \dot{\tilde{y}}^i &= E^i_j\tilde{x}^j + \sum_{s=1}^{m} b^i_s\tilde{u}_s. \end{aligned}$$

[1] Nous utilisons tout au long de la convention de sommation d'Einstein.

Marcin Nowicki